

Lógica Matemática

Conceitos Gerais

Prof. Guilherme Tomaschewski Netto
guilherme.netto@gmail.com



Roteiro

- Apresentação dos Objetivos
- Definições
- Aspectos Históricos
- Principais tendências

Legendas

- Nesta apresentação serão utilizadas algumas legendas:



Indica uma referência, para quem ficou curioso e quer aprofundar mais seus conhecimentos sobre o assunto



Indica uma referência importante, leitura obrigatória.

Competências desejadas

Para compreensão dos conceitos abordados é desejado que os alunos já tenham apropriado as seguintes competências:

Compreensão dos conceitos de matemática básica, teoria dos conjuntos.

Lógica Matemática

Para Aristóteles, a Lógica não era uma ciência teórica, prática ou produtiva, mas, sim, um instrumento para todas as ciências. A Lógica Matemática lida com a formalização e a análise de tipos de argumentação utilizados na Matemática.

Lógica Matemática

Parte do problema com a formalização da argumentação matemática é a necessidade de se especificar de maneira precisa uma linguagem matemática formal. Linguagens naturais (Português ou Inglês) não servem para este propósito: elas são muito complexas e estão em constante modificação, além de serem ambíguas.

Formal x Matemática

Lógica matemática surgiu de vários estudos sobre as aplicações possíveis da matemática à Lógica formal onde estas se distinguem em três aspectos:

1. Na lógica matemática as relações lógicas entre os conceitos e juízos são escritos por meio de fórmulas, o que não permite propor várias interpretações dessas relações;
2. O processo de transição das premissas para as conclusões, consequências lógicas no caso da lógica formal, decompõe-se na lógica matemática em elementos atômicos;
3. As regras de transformação dessas fórmulas são análogas às do cálculo que é feito na álgebra
→ Cálculo Lógico



Lógica Matemática

“A formalização forte e a abstração extrema, fora do conteúdo concreto de um texto, permitem aproveitar a lógica matemática para resolver os problemas que eram inacessíveis para a lógica formal”

SIROTINSKAYA, S. & STRIEDER, A.J. 2008

Lógica Matemática

○ Objetivo

1. Análise dos fundamentos da matemática e de suas não-contradições internas.

Outros objetivos “secundários”: criação da teoria de conclusões lógicas, transformação da lógica formal em uma ciência exata (base métodos matemáticos), reconhecimento dos processos lógicos na matemática.

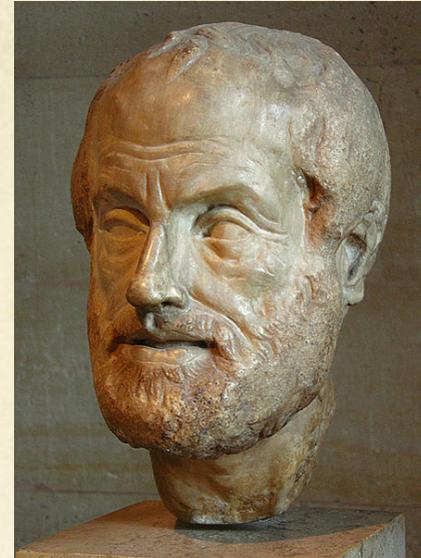
Hilbert, Gödel, Turing, Church, Kleene, Dijkstra, Knuth, Scott, Backus, Floyd, Hopper, Wirth, Plotkin, Hoare, Milner, Pnueli, Petri, Parnas, Jacobson, Booch, Brooks, ...

Métodos para
resolver problemas

Aspectos Históricos da Lógica

PERÍODO ARISTOTÉLICO (\pm 390 a.C. a \pm 1840 d.C.)

- A história da Lógica tem início com o filósofo grego *ARISTÓTELES* (384 – 322 a.C.) de Estagira (hoje Estavo) na Macedônia. Aristóteles criou a ciência da Lógica cuja essência era a teoria do silogismo (certa forma de argumento válido). Seus escritos foram reunidos na obra denominada *Organon ou Instrumento da Ciência*.



Aspectos Históricos da Lógica



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) era alemão e divide o crédito com Isaac Newton a respeito da descoberta e origens do Cálculo Diferencial e Integral. Realizou pequenas contribuições analíticas para o desenvolvimento da lógica matemática que iriam deslançar definitivamente em 1847 com George Boole retomando seu trabalho. Entretanto, utilizava uma notação muito complicada para ser compreendida. Além disto Inventou uma máquina mecânica de calcular para as operações de multiplicação e divisão.



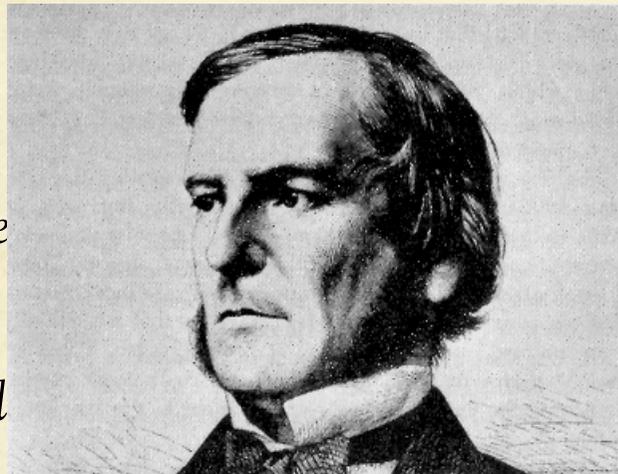
http://pt.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Leibniz

Aspectos Históricos da Lógica

PERÍODO BOOLEANO

O matemático inglês George Boole (1815-1864) que começou a criar apropriadamente a lógica matemática. Entre os principais feitos de George Boole citam-se:

1. Introduziu o seu livro *The*
2. Publicou em compara as l



funcional de lógica formal em
gic de 1847;
of the laws of thought” que
lgebra; e

Basic equations included:

$$\begin{array}{llll} 1A = A & 0A = 0 & AB = BA & AA = A \\ \text{for } A = 0 : A + 1 = 1 & A + 0 = A & A + B = B + A & A(BC) = (AB)C \text{ (associativity)} \\ A(B + C) = AB + AC & & A + (BC) = (A + B)(A + C) & \text{(distributivity)} \end{array}$$

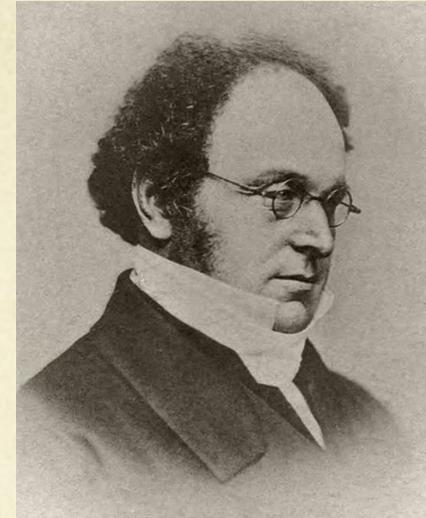
Aspectos Históricos da Lógica

Augustus De Morgan

Matemático e lógico britânico.

Formulou as Leis de De Morgan e foi o primeiro a introduzir o termo e tornar rigorosa a ideia da indução matemática.

As realizações mais importantes de De Morgan foram o lançamento das fundações de relações e a preparação do caminho para o nascimento da lógica simbólica.



Aspectos Históricos da Lógica

○ *Gottlob Frege (1848 a 1925) matemático alemão.*

Entre as principais contribuições de Frege citam-se:

- 1) primeiro trabalho importante publicado em 1879, intitulado “Escrita de Conceitos” que relata a primeira exposição completa da lógica proposicional moderna (e da lógica de primeira ordem);*
- 2) primeira descoberta: o cálculo Sentencial ou de Proposições;*
- 3) distinguiu as premissas (bases de um raciocínio) e as regras de inferência;*
- 4) o uso de símbolos foi adotado por Frege;*
- 5) a verdadeira lógica de primeira ordem data da introdução de quantificadores no trabalho de Frege de (1879).*

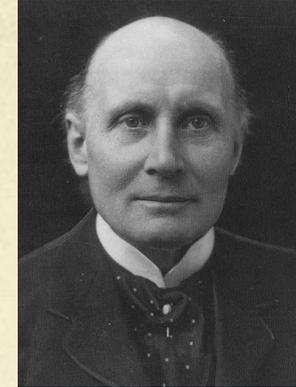


Aspectos Históricos da Lógica

Para finalizar o século XIX tem-se as obras de Giuseppe Peano (1859-1932) que conseguiu elaborar uma notação matemática mais simples que a de Frege e que é utilizada até os dias de hoje. Criou a notação atual para a lógica de primeira ordem em 1889 e é criador também da axiomatização da Aritmética.



Aspectos Históricos da Lógica



Bertrand Russell e Alfred Whitehead em 1902 e Leopold Löwenheim em 1915 concebem artigo que trata do símbolo de igualdade dentro da lógica de primeira ordem. Hoje conhecidos como princípios da identidade e da substituibilidade, respectivamente, a introdução da igualdade e a eliminação da igualdade num sistema dedutivo com predicados de primeira ordem.

Aspectos Históricos da Lógica

David Hilbert (1862–1943) propôs 23 problemas, que em sua opinião ocupariam os matemáticos pelo século que se iniciara (e estava correto!). Ficou mais famoso pelos problemas que criou do que pelos que resolveu.

- Tudo na matemática pode ser provado a partir de axiomas básicos usando raciocínio lógico.

Princípio da Completeza: Todas as perguntas (enunciadas como questões matemáticas) podem ser respondidas (tem prova).

Princípio da Consistência: Existe apenas uma resposta (verdadeiro ou falso) para cada pergunta.



Aspectos Históricos da Lógica

Kurt Friedrich Gödel

O trabalho mais conhecido de Gödel é seu teorema da incompletude(1931), no qual afirma que qualquer sistema axiomático suficiente para incluir a aritmética dos números inteiros não pode ser simultaneamente completo e consistente.



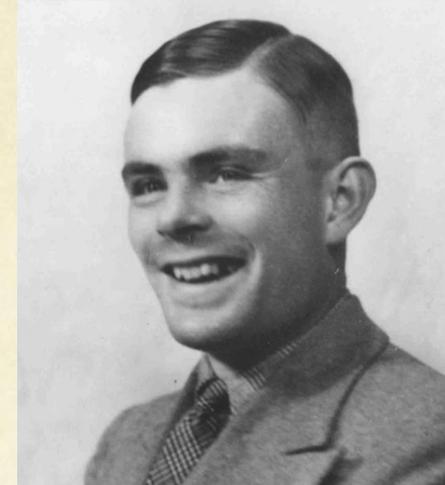
Aspectos Históricos da Lógica

Alan Turing(1931)

Entscheidungsproblem

(problema de decisão)

Há uma maneira de saber se existe uma prova para uma sentença?



Se existe um processo genérico que possa ser usado para determinar se uma sentença tem prova, este processo deve ser finito: um número finito de passos que, aplicados a uma entrada finita, entrega um resultado.



http://pt.wikipedia.org/wiki/Alan_Turing

Aspectos Históricos da Lógica

- Hilbert (1928):
 - Matemática é logicamente completa?(1)
 - Matemática é logicamente consistente?(2)
 - Matemática é logicamente decidível?(3)
- Gödel (1931): NÃO, NÃO...
 - Lógica matemática é incompleta
 - E sua consistência não pode ser provada por si mesma
- Turing (1936): ...e NÃO!
 - **Lógica matemática é indecidível**
 - não há nenhum procedimento para determinar se uma proposição é demonstrável



Lógica Matemática

Principais tendências

- Lógica Matemática Clássica
- Lógicas Complementares da clássica
- Lógicas Rivals da Clássica

Lógica Matemática Clássica

- 1º Nível de Formalismo
Lógica Elementar das proposições (Álgebra da lógica, Álgebra das proposições e Cálculo das Proposições)
- 2º Nível de Formalismo
Lógica de predicados (Lógica de Predicados, Cálculo de predicados)
- 3º Nível de Formalismo
Cálculo Funcional generalizado (Metateorias dos cálculos lógicos)

Lógica Matemática Clássica

○ Proposições

Sentenças declarativas pertencentes a uma certa linguagem. São afirmações que pode receber os valores lógicos verdadeiro o falso apenas(propriedade da Bivalência)

- cachorro é um animal. - Verdadeiro
- $2 + 2 = 7$ - Falso

Sentenças interrogativas, exclamativas e imperativas não são proposições, pois não é possível dizer se são verdadeiras ou falsas.

Exemplos:

- Hoje está chovendo muito!
- Como foi a aula?
- Limpe a cozinha.
- Esta sentença não é verdadeira.

Lógica Matemática Clássica

- **Princípio da identidade** – se um enunciado é verdadeiro, essa é sua identidade.
- **A lei da não contradição** – duas proposições contraditórias não podem ser verdadeiras.
- **A lei do terceiro excluído** – ou é V ou F, exclui uma terceira possibilidade.
- **A lei da dupla negação** – a negação da negação é a afirmação

Lógicas Complementares da clássica

- Complementam a lógica matemática clássica sem abolir suas leis básicas.

Lógica Modal

Inclusão de quatro outras noções básicas:

Necessidade, impossibilidade, possibilidade e contingência.

Para cada uma destas uma proposição pode ser falsa ou verdadeira, conservando a propriedade da bivalência.

Lógicas Rivais da Clássica

Caracterizam-se por derogarem pelo menos uma das quatro leis principais da lógica clássica.

Estão neste grupo:

Lógicas intuicionistas, lógicas polivalentes, probanilísticas, reflexivas, fuzzy, entre outras.

Lógicas Rivais da Clássica

Lógica Difusa ou Fuzzy

É uma extensão da lógica booleana que admite valores lógicos intermediários entre o FALSO (0) e o VERDADEIRO (1); por exemplo o valor médio 'TALVEZ' (0,5). Isto significa que um valor lógico difuso é um valor qualquer no intervalo de valores entre 0 e 1. Este tipo de lógica engloba de certa forma conceitos estatísticos principalmente na área de Inferência.



http://pt.wikipedia.org/wiki/L%C3%B3gica_fuzzy

Bibliografia

SAMPAIO, L.S.C. 2001. A lógica da Diferença. Editora UFRJ, Rio de Janeiro(Brasil), 172pp.

SIROTINSKAYA, S. & STRIEDER, A.J. 2008. Lógica matemática na integração de dados e na modelagem: elementos básicos. Editora UFRGS, Porto Alegre(Brasil), 281pp.

GLUZ, J.C. 2003. Apostila da Dsiciplina de lógica para Computação. UERGS. Disponível por www em: <http://www.gritee.com/participantes/jcgluz/notas-de-aula/apostila-log-comp-uergs.pdf>.

that's all folks!

